

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 13

## Analyse géométrique



- 13.1 Opérateurs différentiels
- 13.2 Identités différentielles duales
- 13.4 Théorème du rotationnel
- 13.4 Théorème de la divergence
- 13.5 Théorème fondamental de l'intégration
- 13.6 Théorème de Cauchy
- 13.7 Equation de Maxwell
- 13.8 Equation d'onde électromagnétique

- **Gradient** : vecteur  $v$

$$\nabla v = \nabla \cdot v + \nabla \wedge v \quad (13.3)$$

- 1 **Divergence** :  $\nabla \cdot v$

- 2 **Rotationnel** :  $\nabla \wedge v$

- **Dualité** : bivecteur  $\leftrightarrow$  pseudovecteur

$$(\nabla \wedge v)^* = \nabla \times v \quad (13.7)$$

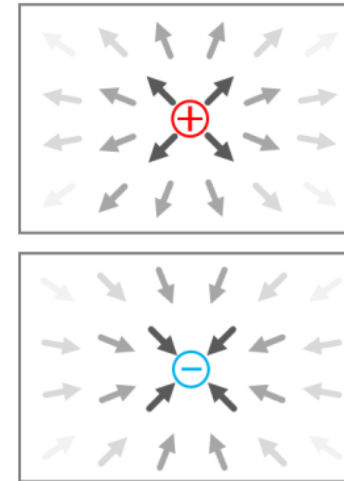
- **Gradient** : bivecteur  $B$

$$\nabla B = \nabla \cdot B + \nabla \wedge B \quad (13.4)$$

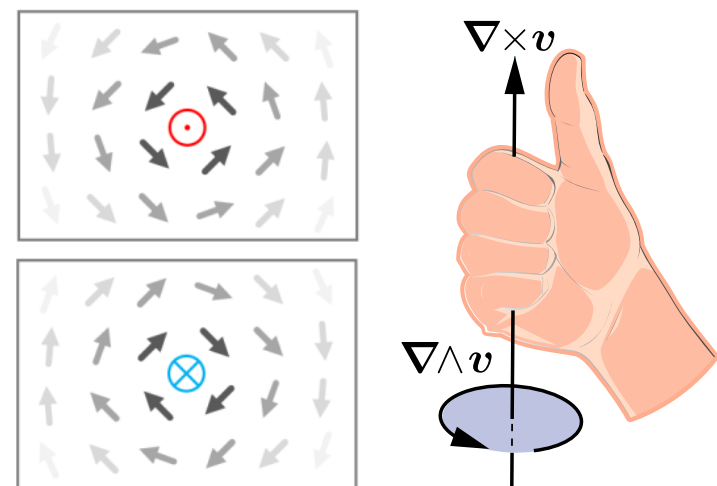
- **Gradient** : multivecteur  $M$

$$\nabla M = \nabla \cdot M + \nabla \wedge M \quad (13.5)$$

- 1 **Divergence** : charges  
champ électrique



- 2 **Rotationnel** : courants  
champ magnétique



- **Identités duales de vecteurs:** (12.43) et (12.46) où  $u = \nabla$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})^* = \nabla \wedge \mathbf{v}^*$$

$$(\nabla \wedge \mathbf{v})^* = \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (13.9)$$

- **Identité hybride :** (13.7) et (13.9)

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (13.7)$$

- **Identités duales de bivecteurs :** (12.49) et (12.52) où  $u = \nabla$

$$(\nabla \cdot B)^* = \nabla \wedge B^*$$

$$(\nabla \wedge B)^* = \nabla \cdot B^* \quad (13.11)$$

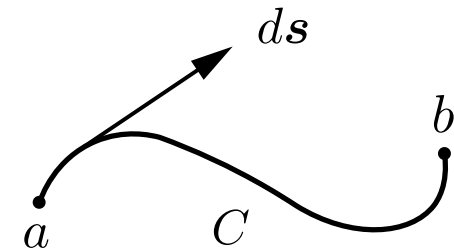
- **Identités hybrides :** (13.7) et (13.11)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v})^* = (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{v})^* = 0 \quad (13.12)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \wedge \mathbf{v})^* = \nabla \cdot ((\nabla \wedge \mathbf{v})^*)^* = -\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v})$$

- Intégrale de Riemann : scalaire  $f$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad (13.14)$$



- Notation :

$$df = f d^0 \mathbf{x} \quad \text{et} \quad ds = d^1 \mathbf{x} \quad (13.16)$$

- Identités algébriques : courbe  $C = [a, b]$  dimension 1

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_C ds \cdot \frac{df}{ds} = \int_C ds \cdot \nabla f = \int_C d^1 \mathbf{x} \cdot \nabla f \quad (13.15)$$

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_a^b dx \frac{df}{dx} = \int_{f(a)}^{f(b)} df = \int_{\partial C} d^0 \mathbf{x} f \quad (13.17)$$

- Théorème du gradient : scalaire  $f$

$$\int_C d^1 \mathbf{x} \cdot \nabla f = \int_{\partial C} d^0 \mathbf{x} f \quad (13.18)$$

- **Théorème du rotationnel** : vecteur  $\mathbf{f}$

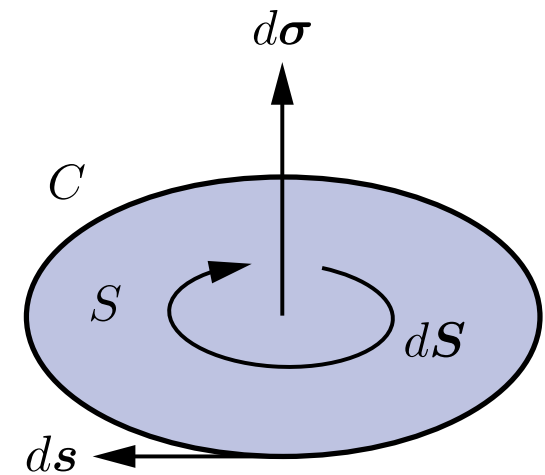
$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \quad (13.19)$$

- **Dualité** : pseudovecteur et bivecteur

$$d\boldsymbol{\sigma}^* = d\mathbf{S} \quad \text{ainsi} \quad d\boldsymbol{\sigma} = -d\mathbf{S}^* \quad (13.20)$$

- **Notation** : où  $|d\boldsymbol{\sigma}| = |d\mathbf{S}|$  et  $d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} = 0$

$$d\mathbf{S} = d^2\mathbf{x} \quad \text{et} \quad d\mathbf{s} = d^1\mathbf{x} \quad (13.23)$$



- **Identité algébrique** : scalaire : espace 3D

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= - \iint_S (\nabla \wedge \mathbf{f})^* \cdot d\mathbf{S}^* = - \iint_S ((\nabla \wedge \mathbf{f})^* \wedge d\mathbf{S})^* \\ &= - \iint_S (d\mathbf{S} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f})^*)^* = - \iint_S d\mathbf{S} \cdot ((\nabla \wedge \mathbf{f})^*)^* \\ &= \iint_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \iint_S d^2\mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (13.21)$$

- **Identité algébrique** : scalaire :  $C = \partial S$

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} \quad (13.22)$$

- **Théorème du rotationnel** : vecteur  $\mathbf{f}$  : surface  $S$

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} \quad (13.24)$$

- **Théorème du rotationnel** :  $d\mathbf{x} \wedge (13.24) \quad d\mathbf{x} \cdot d^2 \mathbf{x} = 0$  et  $d\mathbf{x} \cdot d^1 \mathbf{x} = 0$

$$\iiint_V (d\mathbf{x} \wedge d^2 \mathbf{x}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \oiint_{\partial V} (d\mathbf{x} \wedge d^1 \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f} \quad (13.25)$$

- **Théorème du rotationnel** : vecteur  $\mathbf{f}$  : volume  $V$

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} \quad (13.27)$$

- **Théorème de la divergence** : analyse vectorielle

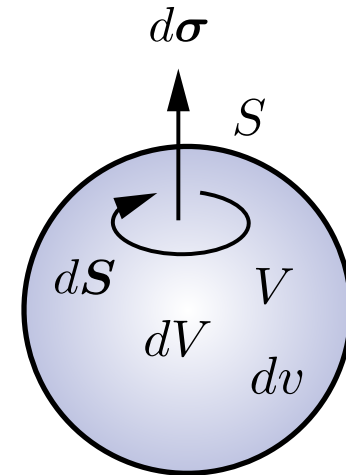
$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dv = \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (13.28)$$

- **Dualité** : pseudovecteur et bivecteur

$$dV = dv^* \quad \text{et} \quad d\mathbf{S} = d\boldsymbol{\sigma}^*$$

$$dv = -dV^* \quad \text{et} \quad d\boldsymbol{\sigma} = -d\mathbf{S}^* \quad (13.29)$$

$$dV = d^3\mathbf{x} \quad \text{et} \quad d\mathbf{S} = d^2\mathbf{x}$$



- **Identité algébrique** : scalaire : espace 3D

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dv &= - \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV^* = - \iiint_V (dV (\nabla \cdot \mathbf{f}))^* \\ &= - \iiint_V (d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f})^* \end{aligned} \quad (13.30)$$

- **Identité algébrique** : scalaire :  $S = \partial V$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= - \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}^* = - \iint_{\partial V} (\mathbf{f} \wedge d\mathbf{S})^* \\ &= - \iint_{\partial V} (d\mathbf{S} \wedge \mathbf{f})^* = - \iint_{\partial V} (d^2\mathbf{x} \wedge \mathbf{f})^* \end{aligned} \quad (13.31)$$

- **Théorème de la divergence** : version duale : vecteur  $\mathbf{f}$

$$\iiint_V d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \iint_{\partial V} d^2\mathbf{x} \wedge \mathbf{f} \quad (13.32)$$

- **Théorème de la divergence** : (13.32)  $d\mathbf{x} \cdot d^1\mathbf{x} = 0$  et  $d\mathbf{x} \cdot d^2\mathbf{x} = 0$

$$\iiint_V d\mathbf{x} \wedge d^2\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \iint_{\partial V} d\mathbf{x} \wedge d^1\mathbf{x} \wedge \mathbf{f} \quad (13.33)$$

- **Théorème de la divergence** : vecteur  $\mathbf{f}$  : surface  $S$

$$\iint_S d^2\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \oint_{\partial S} d^1\mathbf{x} \wedge \mathbf{f} \quad (13.34)$$

- **Théorème de la divergence et du rotationnel** : surface  $S$

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f} \quad (13.34)$$

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} \quad (13.24)$$

- **Théorème du gradient** : surface  $S$  : (13.34) + (13.24)

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot \nabla f = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} f \quad (13.36)$$

- **Théorème de la divergence et du rotationnel** : volume  $V$

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f} \quad (13.32)$$

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} \quad (13.27)$$

- **Théorème du gradient** : volume  $V$  : (13.32) + (13.27)

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \cdot \nabla f = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} f \quad (13.38)$$

- **Théorème du gradient** : dimension  $n = 1$  : multivecteur  $F$

$$\int_C d^1 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \int_{\partial C} d^0 \mathbf{x} F \quad (13.39)$$

Hypersurface régulière : courbe  $C$

- **Théorème du gradient** : dimension  $n = 2$  : multivecteur  $F$

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} F \quad (13.40)$$

Hypersurface régulière : surface  $S$

- **Théorème du gradient** : dimension  $n = 3$  : multivecteur  $F$

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} F \quad (13.41)$$

Hypersurface régulière : volume  $V$

- **Théorème fondamental de l'intégration** : analyse géométrique

$$\int_M d^n \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oint_{\partial M} d^{n-1} \mathbf{x} F \quad (13.42)$$

Hypersurface régulière : variété (manifold)  $M$  : dimensions  $n = 1, 2, 3$

- **Pseudoscalaire** : plan 2D : base orthonormée  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$

$$I = \hat{e}_x \hat{e}_y \quad \text{ainsi} \quad I^2 = \hat{e}_x \hat{e}_y \hat{e}_x \hat{e}_y = -\hat{e}_x \hat{e}_x \hat{e}_y \hat{e}_y = -1 \quad (13.43)$$

- **Gradient** : opérateur différentiel vectoriel

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (13.44)$$

- **Multivecteur pair** : plan 2D : nombre complexe en algèbre géométrique

$$F = u + I v = u + v \hat{e}_x \hat{e}_y \quad (13.45)$$

- **Gradient du multivecteur pair** : (13.44) et (13.45)

$$\nabla F = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \hat{e}_x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \hat{e}_y \quad (13.46)$$

- **Equations de Cauchy Riemann** :  $F(Z) = u + I v$  où  $Z = x + I y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (13.47)$$

- **Fonction holomorphe** :  $F = F(Z)$  satisfait (13.47) : équipotentielle

$$\nabla F = 0 \quad (13.48)$$

- **Théorème fondamental** : fonction holomorphe (13.48) dans (13.42)

$$\int_S d^2 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oint_C d^1 \mathbf{x} F = 0 \quad \text{où} \quad S \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \partial S = C \quad (13.49)$$

- **Théorème fondamental** :  $u$  (13.49) où  $u = \text{cste}$  et  $d^1 \mathbf{x} = dv$

$$\oint_C u d^1 \mathbf{x} F = \oint_C u dv F = \oint_C d(uv) F = 0 \quad (13.50)$$

- **Produit géométrique** : nombre complexe

$$uv = u \cdot v + u \wedge v = x + I y = Z \quad (13.51)$$

- **Théorème de Cauchy** : (13.51) dans (13.50) où  $F = F(Z)$

$$\oint_C F(Z) dZ = 0 \quad (13.52)$$

- **Théorème des résidus** : (13.52) fonction  $F(Z)$  non holomorphe

$$\oint_C F(Z) dZ = 2\pi I \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{Z=Z_k} F(Z) \quad (13.53)$$

- **Equations de Maxwell** : calcul vectoriel

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \quad (13.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (13.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \quad (13.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \partial_t \mathbf{d} + \mathbf{j} \quad (13.57)$$

- **Equations constitutives** : vide

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h} \quad \text{où} \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (13.58)$$

- **Equations de Maxwell** : vide : calcul vectoriel

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (13.60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (13.61)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \quad (13.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{c^2} \left( \partial_t \mathbf{e} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j} \right) \quad (13.63)$$

- **Vecteur de Riemann-Silberstein** : champ électromagnétique complexe

$$f = e + i c b \quad (13.64)$$

- **Multivecteur champ électromagnétique** :

$$F = e + I c b \quad (13.65)$$

- **Bivecteur champ magnétique** : dual du vecteur champ magnétique

$$B = -b^* = -b I^{-1} = b I = I b \quad \text{ainsi} \quad b = B^* \quad (13.66)$$

- **Multivecteur champ électromagnétique** :

$$F = e + c B \quad (13.67)$$

- **Identités algébriques** : (13.7), (13.9), (13.11) et (13.66)

$$\nabla \times b = (\nabla \wedge b)^* = \nabla \cdot b^* = -\nabla \cdot B$$

$$\nabla \cdot b = \nabla \cdot B^* = (\nabla \wedge B)^* \quad (13.68)$$

- **Loi d'Ampère-Maxwell** : (13.68) dans (13.63)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{e} \right) \quad (13.70)$$

- **Loi de Faraday** : (13.62)

$$(\nabla \wedge \mathbf{e})^* = -\partial_t \mathbf{B}^* \quad (13.71)$$

- **Loi de Faraday** : duale

$$\nabla \wedge \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (13.74)$$

- **Loi de Gauss magnétique** : (13.68) dans (13.61)

$$(\nabla \wedge \mathbf{B})^* = 0 \quad (13.69)$$

- **Loi de Gauss magnétique** : duale

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0 \quad (13.75)$$

- **Equations de Maxwell** : vide : algèbre géométrique

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{dimension 0} \quad (13.72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{e} \right) \quad \text{dimension 1} \quad (13.73)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{B} \quad \text{dimension 2} \quad (13.74)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0 \quad \text{dimension 3} \quad (13.75)$$

- **Equations de Maxwell** : vide : champ électromagnétique

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot \mathbf{e} + c \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c\epsilon_0} (c\rho - \mathbf{j}) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{e} \quad (13.76)$$

$$\nabla \wedge F = \nabla \wedge \mathbf{e} + c \nabla \wedge \mathbf{B} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (13.77)$$

- **Gradient** : champ électromagnétique

$$\nabla F = \nabla \cdot F + \nabla \wedge F = \frac{1}{c\epsilon_0} (c\rho - \mathbf{j}) - \frac{1}{c} (\partial_t \mathbf{e} + c \partial_t \mathbf{B}) \quad (13.78)$$

- **Dérivée temporelle** : champ électromagnétique

$$\partial_t F = \partial_t e + c \partial_t B \quad (13.79)$$

- **Equation de Maxwell** : vide (13.79) dans (13.78)

$$\left( \frac{1}{c} \partial_t + \nabla \right) (\varepsilon_0 F) = \frac{1}{c} (c\rho - \mathbf{j}) \quad (13.80)$$

- **Identité algébrique** : (13.81)

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot B) = - \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{b}^*) = - \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b})^* = - (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{b})^* = 0$$

- **Identité** : équations d'Ampère-Maxwell et de Gauss (13.82)

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot B) = - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \nabla \cdot e \right) = - \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} (\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho)$$

- **Equation de continuité électrique** :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (13.83)$$

- Equation d'onde électromagnétique : (13.80)

$$\left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t\right) \left(\nabla + \frac{1}{c} \partial_t\right) (\varepsilon_0 F) = \left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t\right) \frac{1}{c} (c\rho - \mathbf{j}) \quad (13.84)$$

- Identités algébriques : les opérateurs  $\nabla$  et  $\partial_t$  commutent

$$\left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t\right) \left(\nabla + \frac{1}{c} \partial_t\right) = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \quad (13.85)$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t\right) \frac{1}{c} (c\rho - \mathbf{j}) &= \\ &= \nabla \rho - \frac{1}{c} (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}) - \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{j} \end{aligned} \quad (13.86)$$

$$= \nabla \rho - \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{j}$$

- Equation d'onde électromagnétique :  $\rho$  et  $\mathbf{j}$

$$\square (\varepsilon_0 F) = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) (\varepsilon_0 F) = \nabla \rho - \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{j} \quad (13.89)$$

- **Equation d'onde électromagnétique** : vide :  $\rho = 0$  et  $j = 0$

$$\square (\varepsilon_0 F) = \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) (\varepsilon_0 F) = 0 \quad (13.91)$$

- **Densité de force de Lorentz** : calcul vectoriel

$$f = \rho e + j \times b \quad (13.92)$$

- **Identité vectorielle** :

$$j \times b = (j \wedge b)^* = j \cdot b^* = -j \cdot B = B \cdot j \quad (13.93)$$

- **Densité de force de Lorentz** : algèbre géométrique

$$f = \rho e + B \cdot j \quad (13.94)$$